ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კორელაციის კოეფიციენტის ანალოგი ბანახის სივრცეებში და დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის შესახებ ჰილბერტის სივრცეში

ვალერი ბერიკაშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

სადოქტორო პროგრამა

მათემატიკა

ხელმძღვანელები:

ვახტანგ კვარაცხელია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

ომარ ფურთუხია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

თბილისი

2025

სარჩევი

ანოტაცია

წინმდებარე ნაშრომში განხილულია σ-ალგებრები და ზომადი ასახვები მეტრიკულ სივრცეებში, შემთხვევითი ელემენტები და მათი კრებადობის სხვადასხვა სახეები, კორელაციის კოეფიციენტის ანალოგი ბანახის სივრცეში და აგრეთვე დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის მართებულობა ჰილბერტის სივრცის შემთხვევაში.

Abstract

The present paper discusses σ -algebras and measurable mappings in metric spaces, random elements and various types of their summability, the analogue of the correlation coefficient in Banach spaces, and also the validity of the strong law of large numbers in the case of Hilbert spaces.

შესავალი

დიდ რიცხვთა სუსტი კანონიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი საკმარისად დიდი n-სათვის შემთხვევით სიდიდეთა ჯამსა და მის მათემატიკურ მოლოდინს შორის სხვაობა $|\sum_{i=1}^{n} \xi_i - E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)|$ მოსალოდნელია იყოს n-თან შედარებით მცირე. მაგრამ ეს, საზოგადოდ, არ ნიშნავს, რომ შეფარდება $|\sum_{i=1}^{n} \xi_i - E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)|/n$ არის მცირე ყველა n-სათვის. დიდ რიცხვთა სუსტი კანონი ამტკიცებს მხოლოდ იმას, რომ შეფარდება $|\sum_{i=1}^{n} \xi_i - E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)|/n$ დიდ მნიშვნელობებს ძალიან იშვიათად ღებულობს. სუსტი კანონისგან განსხვავებით ამ გარემოებას აზუსტებს დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი, რომელიც პირველად, ბერნულის სქემის კერძო შემთხვევაში როცა $p = 1/2$, ჩამოაყალიბა და დაამტკიცა გამოჩენილმა ფრანგმა მათემატიკოსმა ე. ბორელმა 1909 წელს. ხოლო 1917 წელს ეს ფაქტი ნებისმიერი p-სათვის დაამტკიცა იტალიელმა მათემატიკოსმა კანტელიმ და ის მოკლედ შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$P\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p\right]=1.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ დიდ რიცხვთა სუსტი კანონი ამტკიცებს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად შეფარდება $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i - E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right|/n$ მიისწრაფვის 0-საკენ, დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი ამტკიცებს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად შეფარდება $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i - E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right|/n$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ყოველ $\omega \in \Omega \setminus A$ წერტილში, სადაც Ω არის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე, რომელზედაც განსაზღვრულია ყველა მოცემული შემთხვევითი სიდიდე ξ_i , ხოლო A არის სიმრავლე, რომლის ალბათობა ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ დიდ რიცხვთა კანონის მიმართულებით მიღებული შედეგები ძირითადად ეხება დამოუკიდებელ (ან არაკორელირებულ) შემთხვევით სიდიდეებს. შედერებით მცირეა ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები იმ შემთხვევაში, როცა შემთხვევით სიდიდეებს გააჩნიათ არანულოვანი კოვარიაციები.

გასული საუკუნის მეორე ნახევრიდან დაიწყო ზღვარითი თეორემების შესწავლა უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში, რომლებმაც თავისი სპეციფიკა შეიტანა აღნიშნულ პრობლემატიკაში. უკანასკნელ წლებში სხვადასხვა ქვეყნის მათემატიკოსთა ნაშრომებში ინტენსიურად განიხილება ეგრეთ წოდებული გადანაცვლებადი დიდ რიცხვთა კანონი (ამბობენ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ აკმაყოფილებს გადანაცვლებად დიდ რიცხვთა კანონს, თუ არსებობს N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი გადანაცვლება $\pi: N \to N$ რომ, გადანაცვლებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_{\pi(1)}, \xi_{\pi(2)}, \dots, \xi_{\pi(n)}, \dots$ აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს).

ნაშრომის ბოლო ნაწილი ეხება დიდ რიცხვთა კანონს სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეში. კერძოდ, ჩამოყალიბებულია და დამტკიცებულია ხინჩინისა და ბერნშტეინის თეორემების ანალოგები ჰილბერტის სივრცის შემთხვევაში. კვლევის შემდგომი მიზანია შესწავლილ იქნეს დიდ რიცხვთა კანონი უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში.

ალბათობის თეორია წარმოადგენს მათემატიკის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს დარგს, რომელიც სპეციალისტებს იზიდავს როგორც შემდგომი კვლევითი

პერსპექტივის მრავალფეროვნებით, ასევე პრაქტიკული გამოყენებების სიმრავლითაც. არც თუ ისე ადვილია დავასახელოთ თეორიული თუ გამოყენებითი მეცნიერებების, ეკონომიკისა და ბიზნესის, სოციალური მეცნიერებების ისეთი დარგი, რომელიც ამა თუ იმ ფორმით არ იყენებს ალბათობის თეორიას. ის, რომ ალბათობის თეორია ხასიათდება გამოყენებების სიმრავლით, ძირითადად განპირობებულია ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემებით. წინმდებარე ნაშრომი ეხება ერთ-ერთ მათგანს, სახელდობრ დიდ რიცხვთა კანონს. გარდა შესავალი ნაწილისა, ნაშრომი შედგება ორი ნაწილისაგან, რომელთაგან პირველში მოცემულია დიდ რიცხვთა კანონის განვითარების ძირითადი ეტაპები, ხოლო ბოლო ნაწილში ჩამოყალიბებულია და დამტკიცებულია ამ ნაშრომის მთავარი მიზანი - დიდ რიცხვთა კანონი სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეში მნიშვნელობების მქონე სუსტად კორელირებული შემთხვევითი ელემენტებისათვის.

თავი I

σ-ალგებრები და ზომადი ასახვები მეტრიკულ სივრცეებში

§1. ზომადი სივრცეები და ასახვები, ბორელის σ-ალგებრა

წყვილს $(\Omega, \mathcal{A})$ ეწოდება ზომადი სივრცე, სადაც Ω არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო $\mathcal{A}$ მის ქვესიმრავლეთაგან შექმნილი რაიმე σ-ალგებრაა. სიმრავლეს $\mathcal{A}$-დან ეწოდება ზომადი.

ვთქვათ $(\Omega, \mathcal{A})$ და $(X, \mathcal{B})$ ზომადი სივრცეებია. $\xi: \Omega \to X$ ასახვას ეწოდება $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ ზომადი, თუ ყოველი $B \in \mathcal{B}$ სიმრავლისთვის მისი სრული წინასახე $\xi^{-1}(B)$ ეკუთვნის $\mathcal{A}$-ს. თუ კონტექსტიდან გასაგებია რომელ σ-ალგებრებზეა ლაპარაკი, ჩვენ უბრალოდ ვიტყვით, რომ ξ ზომადი ასახვაა.

როცა X სიმრავლეზე განსაზღვრულია რაიმე სტრუქტურა (ალგებრული ან ტოპოლოგიური), მაშინ X-ზე σ-ალგებრის მოცემისას ბუნებრივია ამ გარემოების გათვალისწინება.

ვთქვათ, X ტოპოლოგიური (კერძოდ, მეტრიკული) სივრცეა. X სივრცის ყველა ღია სიმრავლის მომცველ მინიმალურ σ-ალგებრას ბორელის σ-ალგებრა ეწოდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\mathcal{B}(X)$-ით. $B\epsilon\mathcal{B}(X)$ სიმრავლეს ეწოდება ბორელის სიმრავლე.

თუ X სიმრავლეში განხილულია სხვადასხვა ტოპოლოგია, მაშინ ბორელის σ-ალგებრა X სივრცეში τ ტოპოლოგიის მიმართ აღინიშნება $\mathcal{B}(X,\tau)$ სიმბოლოთი.

ითვლება, რომ რიცხვითი ღერძი R^1, აგრეთვე სივრცეები $R^n, n>1$, აღჭურვილია ჩვეულებრივი (ევკლიდის) მეტრიკით.

თვლადი კლასით წარმოქმნილი σ-ალგებრის სიმძლავრე არ აღემატება c-ს (კონტინუუმის) სიმძლავრეს. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ X ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური სივრცეა თვლადი ბაზით და კარდინალური რიცხვით $card\ X=c$, მაშინ $card\ \mathcal{B}(X)=c$. კერძოდ, ეს სრულდება, თუ X სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა და $card\ X=c$. ამრიგად, ამ შემთხვევებში არსებობს სიმრავლე, რომელიც ბორელის არ არის.

ვთქვათ X_1 და X_2 ტოპოლოგიური სივრცეებია. $\xi: X_1 \to X_2$ ასახვას ეწოდება ბორელის (ან ბორელის აზრით ზომადი), თუ ის $(\mathcal{B}(X_2), \mathcal{B}(X_1))$ ზომადია. ადვილი დასანახია, რომ უწყვეტი ასახვა წარმოადგენს ბორელის ასახვას.

წინადადება 1.1. ვთქვათ, X მეტრიკული სივრცეა, $(\Omega,\mathcal{A})$ ზომადი სივრცე და $\xi_n: \Omega \to X$, $n \in N$ $(\mathcal{B}(X),\mathcal{A})$ ზომადი ასახვა. დავუშვათ, რომ $\xi: \Omega \to X$ ასახვა ξ_n ასახვათა მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარია. მაშინ ξ ზომადი ასახვაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, ϱ არის X სივრცის მეტრიკა და $A \subset X$ არაცარიელი ქვესიმრავლეა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\varrho(x,A)=\inf\{\varrho(x,y): y\in A\}$ (მანძილი $x\in X$ წერტილიდან A სიმრავლემდე). ξ ასახვის ზომადობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\xi^{-1}(U)\in\mathcal{A}$ ყოველი ღია $U\subset X$ ქვესიმრავლისთვის. აღვნიშნოთ $U_k=\{x\in X: \varrho(x,U^c)>k^{-1}\}$, $k\in N$. მაშინ, $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k=U$ და ადვილი დასანახია, რომ

$$\xi^{-1}(\mathrm{U})=\bigcup_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \underline{\lim_{n}}\, \xi_n^{-1}(U_k).$$

აქედან ცხადია, $\xi^{-1}(U)\in\mathcal{A}$.

როგორც ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს, დამტკიცებული წინადადება საზოგადოდ, არ არის სწორი ზოგადი ტოპოლოგიური X სივრცის შემთხვევაში.

მაგალითი (რ. მ. დადლი). ვთქვათ $\Omega=[0,1]$ არის სივრცე ჩვეულებრივი მეტრიკით, X არის ყველა $x:[0,1]\to[0,1]$ ფუნქციების სიმრავლე წერტილოვანი კრებადობის ტოპოლოგიით. ტიხონოვის თეორემის თანახმად, X ჰაუსდორფის

კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა. განვიხილოთ $\xi_n: \Omega \to X$, $n \in N$, ასახვები, განსაზღვრული ტოლობით: $\xi_n(\omega)(t) = \max(1 - n|\omega - t|, 0)$, $t, \omega \in [0,1]$. ცხადია, ξ_n, $n \in N$, ზომადი (უფრო მეტიც, უწყვეტი) ასახვაა. ადვილი დასანახია, რომ $\lim_n \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, სადაც $\xi(\omega)(t) = 1$, თუ $\omega = t$, და $\xi(\omega)(t) = 0$, თუ $\omega \neq t$. ვაჩვენოთ, რომ ξ ასახვა არაზომადია. ცხადია, ყოველი $\omega \in \Omega$-სთვის $U_\omega = \{x \in X: x(\omega) > 0\}$ არის X-ის ღია ქვე-სიმრავლე. ახლა ვთქვათ, $A \subset \Omega$ არ არის ბორელის სიმრავლე და ვთქვათ, $U = \bigcup_{\omega \in A} U_\omega$. ცხადია, U არის X-ის ღია ქვესიმრავლე, თუმცა $\xi^{-1}(U) = A$ და ამის გამო ξ არაზომადია.

ამბობენ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცის B სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება, თუ არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $U \subset X$, რომ $B \triangle U$ სიმრავლე პირველი კატეგორიისაა. (მოქმედებას $B \triangle U = (B \setminus U) \cup (U \setminus B)$ ეწოდება B და U სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა).

წინადადება 1.2 X ტოპოლოგიური სივრცის ბერის თვისების მქონე ქვესიმრავლეთა კლასი ქმნის σ-ალგებრას. ყოველ ბორელის სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ B_n , $n \in N$, X-ის ქვესიმრავლეებია, რომელთაც გააჩნიათ ბერის თვისება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სიმრავლეს $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ აგრეთვე გააჩნია ბერის თვისება. ცხადია, B სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $B = U \triangle I$, სადაც U ღია სიმრავლეა, ხოლო I - პირველი კატეგორიის სიმრავლე. ჩვენ გვაქვს $B^c = U^c \triangle I$, სადაც $F = U^c$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. ვთქვათ, V სიმრავლე F-ის შიგა წერტილთა სიმრავლეა და $J = F \setminus V$. მაშინ J სიმრავლე პირველი კატეგორიისაა და $F = V \cup J = V \triangle J$; აქედან $B^c = F \triangle I = (V \triangle J) \triangle I = V \triangle (J \triangle I)$. ამრიგად, თუ B-ს გააჩნია ბერის თვისება, მაშინ B^c-საც აგრეთვე გააჩნია ბერის თვისება. მაშასადამე, ბერის თვისების მქონე სიმრავლეთა კლასი ქმნის σ-ალგებრას. რადგან ყოველ ღია სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება, ამიტომ ბორელის ყოველ სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება.

§2. ასახვათა ოჯახებით წარმოქმნილი σ-ალგებრები.

ხშირად ჩნდება ასახვათა ოჯახებით წარმოქმნილი σ-ალგებრების განხილვის აუცილებლობა. ვთქვათ, Γ არის X სიმრავლეზე განსაზღვრული ასახვების რაიმე ოჯახი მნიშვნელობებით ზომად სივრცეებში (რომლებიც, საზოგადოდ, შესაძლოა იყვნენ განსხვავებული სხვადასხვა ასახვებისთვის) და განვიხილოთ ის მინიმალური σ-ალგებრა, რომლის მიმართაც ზომადია ყველა განხილული ასახვა. ეს σ-ალგებრა აღვნიშნოთ $\hat{C}(X,\Gamma)$ სიმბოლოთი. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $(\Omega, \mathcal{A})$ ზომადი სივრცეა, მაშინ $\xi: \Omega \to X$ ასახვა $(\hat{C}(X,\Gamma), \mathcal{A})$ ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი ასახვისათვის $f \in \Gamma$ ასახვა $f \circ \xi$ არის ზომადი. ჩვეულებრივ Γ წარმოადგენს რიცხვით ფუნქციათა ოჯახს, რომლრბიც განსაზღვრულია X-ზე ე.ი. $\Gamma \subset R^X$.

ვთქვათ, X სიმრავლეა და $\Gamma \subset R^X$ რიცხვით ფუნქციათა რაიმე ოჯახია. ცილინდრული სიმრავლეები ანუ ცილინდები (X, Γ) წყვილის მიმართ ეწოდება შემდეგი სახის სიმრავლეებს

$$C_{f_1,\dots,f_n,B} = \{x \in X: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in B\}, \text{ სადაც } \{f_1, \dots, f_n\} \subset \Gamma, B \in \mathcal{B}(R^n), n \in N.$$

B სიმრავლეს ეწოდება ცილინდრის ფუძე, ხოლო $f_1, \dots, f_n$ არის მისი მსახველი. ყველა ცილინდრთა სიმრავლე აღინიშნება $\mathcal{C}(X, \Gamma)$ სიმბოლოთი. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\mathcal{C}(X, \Gamma)$ არის X-ის ქვესიმრავლეთა ალგებრა და ეს ალგებრა წარმოშობს $\hat{\mathcal{C}}(X, \Gamma)$ σ-ალგებრას. $\mathcal{C}(X, \Gamma)$ ალგებრას ეწოდება ცილინდრული ალგებრა, ხოლო მის მიერ წარმოქმნილ $\hat{\mathcal{C}}(X, \Gamma)$ σ-ალგებრას - ცილინდრული σ-ალგებრა.

ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცეა. $C(X)$-ით (შესაბამისად $C_b(X)$-ით) აღვნიშნოთ X-ზე განსაზღვრული უწყვეტი (შესაბამისად, უწყვეტი და შემოსაზღვრული) ნამდვილი ფუნქციების სიმრავლე. X-ის ქვესიმრავლეებისაგან შედგენილ იმ მინიმალურ σ-ალგებრას, რომლის მიმართაც ზომადია ყველა $f \in C(X)$ ფუნქცია, ეწოდება X სივრცის ბერის σ-ალგებრა და აღინიშნება სიმბოლოთი $\mathcal{B}_0(X)$. ადვილი დასანახია, რომ $\mathcal{B}_0(X) = \hat{\mathcal{C}}(X, C_b(X))$. თუ X-ში მოცემულია სხვადასხვა ტოპოლოგიები, მაშინ $\mathcal{B}_0(X, \tau)$-ით აღინიშნება ბერის σ-ალგებრა τ ტოპოლოგიის მიმართ. ცხადია, ყოველი X ტოპოლოგიური სივრცისთვის ადგილი აქვს ჩართვას $\mathcal{B}_0(X) \subset \mathcal{B}(X)$.

წინადადება 1.3. ვთქვათ, X მეტრიკული სივრცეა.

ა) ყოველი ჩაკეტილი $F \subset \mathrm{X}$ სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი ფუნქცია $f \in C(X)$, რომ $F = f^{-1}(\{0\})$.

ბ) $\mathcal{B}_0(X) = \mathcal{B}(X)$.

დამტკიცება. ა) $f(x)$-ად შეგვიძლია ავიღოთ მანძილი x-დან F სიმრავლემდე; ბ) გამომდინარეობს ა)-დან.

შედეგი. ყოველ ტოპოლოგიურ X სივრცეში $\mathcal{B}_0(X)$ σ-ალგებრა წარმოიშობა შემდეგი სახის სიმრავლეებით $f^{-1}(\{0\}), f \in C(X)$.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ჩაკეტილი $E \in R^1$ ქვესიმრავლისთვის და ყოველი $g \in C(X)$ ფუნქციისთვის მოიძებნება ისეთი $f \in C(X)$ ფუნქცია, რომ $g^{-1}(E) = f^{-1}(\{0\})$. რიცხვითი ღერძის შემთხვევაში 1.3 ა) წინადადების გამოყენებით, ვიპოვით ისეთ $h \in C(R^1)$ ფუნქციას, რომ $h^{-1}(\{0\}) = E$. ახლა საკმარისია ავიღოთ $f(x) = h(g(x)), x \in X$.

§3. σ-ალგებრები სივრცეთა ნამრავლში.

ვთქვათ, $(X_t,\mathcal{B}_t)_{t\in\Lambda}$ - ზომადი სივრცეების არაცარიელი ოჯახია. აღვნიშნოთ ΠX_t-თი X_t სივრცეების პირდაპირი ნამრავლი, $t\in\Lambda$, და ვთქვათ, π_t არის ΠX_t-ს პროექცია X_t-ზე, ანუ π_t ასახავს ΠX_t-ს X_t-ზე და ის განისაზღვრება ტოლობით $\pi_t(x)=x_t$, $x\in\Pi X_t$, $x_t\in X_t$. სივრცეთა ΠX_t ნამრავლის იმ მინიმალურ σ-ალგებრას, რომლის მიმართაც ზომადია ყველა π_t პროექცია, $t\in\Lambda$, ეწოდება $\mathcal{B}_t$ σ-ალგებრების ნამრავლი და აღინიშნება $\Pi\mathcal{B}_t$ სიმბოლოთი. ზომად სივრცეს $(\Pi X_t,\Pi\mathcal{B}_t)$ ეწოდება ზომადი $(X_t,\mathcal{B}_t)$ სივრცეების ნამრავლი. თუ $(X_t,\mathcal{B}_t)=(X,\mathcal{B})$ ყოველი $t\in\Lambda$-სთვის, მაშინ $(\Pi X_t,\Pi\mathcal{B}_t)$ აღნიშვნის ნაცვლად ხშირად გამოიყენება $(X^\Lambda,\mathcal{B}^\Lambda)$ აღნიშვნა.

σ-ალგებრა $\Pi\mathcal{B}_t$ წარმოიქმნება (ზომადი) მართკუთხედებით, ანუ $B=\Pi B_t$ სახის $B\subset\Pi X_t$ ქვესიმრავლეებით, სადაც $B_t\in\mathcal{B}_t$ და $B_t\neq X_t$ ინდექსთა $t\in\Lambda$ მხოლოდ სასრული რაოდენობისათვის.

ვთქვათ, $(X,\mathcal{B}),(X_t,\mathcal{B}_t)_{t\in\Lambda}$ - ზომადი სივრცეებია და $f_t\colon X\to X_t$, $t\in\Lambda$, - ზომადი ასახვებია. მაშინ $f\colon X\to\Pi X_t$ ასახვა, განსაზღვრული ტოლობით $f(x)=(f_t(x))_{t\in\Lambda}$, $x\in X$, ასევე ზომადია (σ -ალგებრების ($\Pi\mathcal{B}_t,\mathcal{B}$) წყვილის მიმართ). ეს უშუალოდ გამომდინარეობს $\Pi\mathcal{B}_t$-ს განსაზღვრებიდან.

ვთქვათ, X_t, $t\in\Lambda$, ტოპოლოგიური სივრცეა. რა დამოკიდებულებაა სივრცეთა ნამრავლის ბორელის $\mathcal{B}(\Pi X_t)$ σ-ალგებრასა და ბორელის σ-ალგებრათა $\Pi\mathcal{B}(X_t)$ ნამრავლს შორის?

წინადადება 1.4. ა) $\Pi\mathcal{B}(X_t)\subset\mathcal{B}(\Pi X_t)$.

ბ) თუ Λ სასრული ან თვლადი სიმრავლეა, ხოლო ყოველ X_t სივრცეს გააჩნია თვლადი ბაზა, $t\in\Lambda$ (კერძოდ, თუ ყოველი $t\in\Lambda$-თვის X_t სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა), მაშინ $\mathcal{B}(\Pi X_t)=\Pi\mathcal{B}(X_t)$.

დამტკიცება. ა) დებულების სამართლიანობა გამომდინარეობს $\Pi\mathcal{B}(X_t)$ -ს განსაზღვრებიდან და იქიდან, რომ $\pi_t\colon\Pi X_t\to X_t$, $t\in\Lambda$, პროექციები უწყვეტი ასახვებია.

ბ) ვთქვათ $\mathfrak{S}_t$ არის X_t სივრცის თვლადი ღია ბაზა. განვიხილოთ $U=\Pi U_t$ სიმრავლეთა ოჯახი, სადაც $U_t=X_t$ ინდექსთა ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა, შესაძლოა, მათი სასრული რაოდენობისა. ხოლო, თუ $U_t\neq X_t$, მაშინ $U_t\in\mathfrak{S}_t$. რადგან ეს ოჯახი წარმოადგენს $\Pi\mathcal{B}_t$-ს ნაწილს და ქმნის ΠX_t სივრცის თვლად ღია ბაზას, ამიტომ $\mathcal{B}(\Pi X_t)\subset\Pi\mathcal{B}(X_t)$. შებრუნებულ ჩართვას ადგილი აქვს ა)-ს თანახმად.

თავი II

σ-ალგებრები ბანახის სივრცეებში

§1. ზომადი ვექტორული სივრცე

ბანახის სივრცე მეტრიკული სივრცის კერძო შემთხვევაა, ამიტომ მასზე ვრცელდება წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები. მეტრიკული სტრუქტურის გარდა ბანახის სივრცეს გააჩნია ალგებრული სტრუქტურაც. ჩვენ განვიხილავთ ამ სტრუქტურების კავშირს ზომად სტრუქტურებთან.

ვთქვათ, X ჯგუფია. ზომად $(X, \mathcal{B})$ სტრუქტურას ეწოდება ზომადი ჯგუფი, თუ ასახვები $(x, y) \to x + y$ და $x \to -x$ წარმოადგენენ ზომად ასახვებს, შესაბამისად, σ-ალგებრათა $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ და $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ წყვილების მიმართ.

ვთქვათ, X ვექტორული სივრცეა. თუ არ იქნება საწინააღმდეგო ნათქვამი, ქვემოთ განვიხილავთ ნამდვილ ვექტორულ სივრცეს (ანუ ვექტორულ სივრცეს ნამდვილი სკალარების მიმართ). ვთქვათ, $\mathcal{B}$ არის X-ის ქვესიმრავლეთა რაიმე σ-ალგებრა. $(X, \mathcal{B})$ წყვილს ეწოდება ზომადი ვექტორული სივრცე, თუ:

ა) X ზომადი ჯგუფია შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ბ) ასახვა $(\alpha, x) \to \alpha x$ წარმოადგენს $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(R^1) \times \mathcal{B})$ ზომად ასახვას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $(X, \mathcal{B})$ ზომადი ვექტორული სივრცეა, მაშინ ყოველი $\alpha \in R^1$, $\alpha \neq 0$, რიცხვისათვის ჰომოთეტია $x \to \alpha x$ წარმოადგენს X-ის ზომად ასახვას საკუთარ თავზე.

დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულება.

წინადადება 2.1. ა) თუ X მეტრიზებადი სეპარაბელური ტოპოლოგიური ჯგუფია, მაშინ $(X, \mathcal{B}(X))$ ზომადი ჯგუფია.

ბ) თუ X სეპარაბელური მეტრიზებადი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეა, მაშინ $(X, \mathcal{B}(X))$ ზომადი ვექტორული სივრცეა.

შემდეგი დებულება გვიჩვენებს, წინადადება 2.1-ში სეპარაბელობის მოთხოვნა არსებითია.

წინადადება 2.2. ა) თუ X ტოპოლოგიური ჯგუფია, მაშინ გადაადგილება $x \to x + a$, $a \in X$, და საწინააღმდეგო ნიშანზე გადასვლის ოპერაცია $x \to -x$, არის ბორელის აზრით ზომადი ასახვები; თუ X ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეა, მაშინ $x \to \alpha x$, $\alpha \in R^1, \alpha \neq 0$, ჰომოთეტია ზომადია ბორელის აზრით.

ბ) თუ X ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ჯგუფია და $card\ X > c$, მაშინ $(X, \mathcal{B}(X))$ არ არის ზომადი ჯგუფი. ამრიგად, თუ X მეტრიზებადი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეა და $card\ X > c$, მაშინ $(X, \mathcal{B}(X))$ არ არის ზომადი ვექტორული სივრცე.

დამტკიცება. ა) გამომდინარეობს იქიდან, რომ ღია სიმრავლეთა ოჯახი ინვარიანტულია მითითებული ოპერაციების მიმართ.

ბ) განვიხილოთ ასახვა $f: X \times X \to X$ განსაზღვრული ტოლობით $f(x, y) = x - y$. ლემა 1.1-ის შედეგის თანახმად $f^{-1}(\{0\}) = \Delta_X \notin \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$.

შენიშვნა. ბ)-დან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ არსებობს არაზომადი კომპაქტური ჯგუფები.

წინადადება 2.3. ვთქვათ, X ვექტორული სივრცეა და Γ არის X-ზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალების რაიმე არაცარიელი სიმრავლე. მაშინ $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$ არის ზომადი ვექტორული სივრცე.

ეს წინადადება არის უშუალო შედეგი იმისა, რომ $(R^1, \mathcal{B}(R^1))$ არის ზომადი ვექტორული სივრცე.

§2. დამოკიდებულება სხვადასხვა σ-ალგებრებს შორის

ვთქვათ, X ნორმირებული სივრცეა $\|\cdot\|$ ნორმით. X^*-ით აღვნიშნოთ X სივრცის შე- უღლებული სივრცე, ანუ ყველა უწყვეტ წრფივ ფუნქციონალთა სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია X-ზე. X^*-ს გააჩნია ვექტორული სივრცის სტრუქტურა და მისი ნორმა განისაზღვრება ტოლობით: $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)|: x \in X, \|x\| = 1\}$, $x^* \in X^*$; აქ $x^*(x)$ არის x^* წრფივი ფუნქციონალის მნიშვნელობა x ელემენტზე. მას ჩვენ ხშირად ასედაც ჩავწერთ $\langle x, x^* \rangle$.

X სივრცეს ჩვენ გავაიგივებთ მისი ბუნებრივ სახესთან X^{**} -ში. X სივრცის ერთეულოვან ბურთს $\{x \in X: \|x\| \le 1\}$ აღვნიშნავთ B_X-ით.

$\hat{C}(X, X^*)$ σ-ალგებრას, ანუ X-ის ქვესიმრავლეებისაგან შედგენილ იმ მინიმალურ σ-ალგებრას, რომლის მიმართაც ზომადია ყველა $x^* \in X^*$ ფუნქციონალი, ჩვენ ვუწოდებთ X სივრცის ცილინდრულ σ-ალგებრას. წერის სიმოკლისთვის ამ σ-ალგებრას ხშირად $\hat{C}(X)$-ით აღვნიშნავთ. ცხადია, რომ $\hat{C}(X) \subset \mathcal{B}(X)$.

შეუღლებულ X^* სივრცეში, $\hat{\mathcal{C}}(X^*) = \hat{\mathcal{C}}(X^*, X^{**})$ და $\mathcal{B}(X^*)$ σ-ალგებრებთან ერთად განიხილება σ-ალგებრა $\hat{\mathcal{C}}(X^*, X)$. ცხადია, $\hat{\mathcal{C}}(X^*, X) \subset \hat{\mathcal{C}}(X^*) \subset \mathcal{B}(X^*)$. ქვემოთ ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ ეს ჩართვები შეიძლება იყოს მკაცრი. შემდეგი თეორემა ჩამოვაყალიბოთ დაუმტკიცებლად.

თეორემა 2.1. ვთქვათ, X ბანახის სეპარაბელური სივრცეა, $\Gamma \subset X^*$ რაიმე ქვესიმრავლეა, რომელიც განაცალებს X-ის წერტილებს. მაშინ $\hat{\mathcal{C}}(X, \Gamma) = \mathcal{B}(X)$ და კერძოდ, $\hat{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{B}(X)$.

თეორემა 2.1-ის კერძო შემთხვევა - ბორელის და ცილინდრული σ-ალგებრების დამთხვევის დამტკიცება - შეიძლება უფრო ზოგად სიტუაციაში.

თეორემა 2.2. (ე. მურიე). ა) თუ X სეპარაბელური ნორმირებული სივრცეა, მაშინ $\hat{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{B}(X)$.

ბ) თუ X^* სეპარაბელური სივრცეა, მაშინ $\hat{\mathcal{C}}(X^*, X) = \hat{\mathcal{C}}(X^*) = \mathcal{B}(X^*)$.

დამტკიცება. ა) თავიდან ვაჩვენოთ, რომ $B_X \in \hat{\mathcal{C}}(X)$. ვთქვათ, (x_n) ყველგან მკვრივი მიმდევრობაა X-ში. ჰანი-ბანახის თეორემის თანახმად X^*-ში არსებობს ისეთი (x_n^*) მიმდევრობა, რომ $\|x_n^*\| = 1$ და $\langle x_n, x_n^* \rangle = \|x_n\|$, $n \in N$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველი $x \in X$-თვის $\|x\| = \sup_n |\langle x, x_n^* \rangle|$. აქედან

$$B_X = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: |\langle x, x_n^* \rangle| \leq 1\} \in \hat{\mathcal{C}}(X),$$

და რადგან $(X, \hat{\mathcal{C}}(X))$ ზომადი ვექტორული სივრცეა, ამიტომ ყველა ბურთი ეკუთვნის $\hat{\mathcal{C}}(X)$-ს. აქედან და X-ის სეპარაბელურობიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{B}(X) \subset \hat{\mathcal{C}}(X)$.

ბ) დამტკიცება ანალოგიურია, თუ გავითვალისწინებთ, რომ X არის X^*-ის მანორმირებელი სიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ ბ) ასევე არის თეორემა 2.1-ის კერძო შემთხვევა.

წინადადება 2.4. ვთქვათ, X ბანახის რეფლექსური (არა აუცილებლად სეპარაბელური) სივრცეა და $\Gamma \subset X^*$ - ფუნქციონალების რაიმე განმაცალებელი ოჯახია. მაშინ, $\hat{\mathcal{C}}(X, \Gamma) = \hat{\mathcal{C}}(X)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, E არის ყველა იმ $x^* \in X^*$-ების სიმრავლე, რომლებიც ზომადია $\hat{\mathcal{C}}(X, \Gamma)$ σ-ალგებრის მიმართ. მაშინ E წარმოადგენს X^* ბანახის სივრცის ჩაკეტილ ქვესივრცეს, რომელიც შეიცავს Γ-ს. ვაჩვენოთ, რომ $E = X^*$. დავუშვათ $E \neq X^*$. მაშინ ჰანი-ბანახის თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი ელემენტი $x \in X$, $x \neq 0$, რომ

$\langle x, x^* \rangle = 0$ ყოველი $x^* \in E$ -სთვის. კერძოდ $\langle x, x^* \rangle = 0$ ყოველი $x^* \in \Gamma$ -სათვის, რაც შეუძლებელია, რადგან Γ განაცალებს X-ის წერტილებს.

შენიშვნა. წინადადება 1.5-დან გამომდინარეობს, რომ თეორემა 2.1-ში და წინადადება 2.4-ში Γ -ს თვისება - განაცალოს X -ის წერტილები, აუცილებელია. საზოგადოდ, არარეფლექსური X-ისთვის წინადადება 2.4 არ არის სწორი.

წინადადება 2.5. ვთქვათ, X, Y ნორმირებული სივრცეებია. ადგილი აქვს შემდეგ დებულებებს.

ა) $\hat{\mathcal{C}}(X \times Y) = \hat{\mathcal{C}}(X) \times \hat{\mathcal{C}}(Y)$.

ბ) თუ $card\ X > c$, მაშინ $(X, \mathcal{B}(X))$ არ არის ზომადი ვექტორული სივრცე.

დამტკიცება. ა) დებულება გამომდინარეობს იქიდან, რომ $X \times Y$ ნორმირებული სივრცის შეუღლებული არის $X^* \times Y^*$. ხოლო დებულება ბ) კი არის წინადადება 2.2 ბ)-ს კერძო შემთხვევა.

§3. რეგულარული და რადონის ზომები

ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცეა. ბორელის $\mathcal{B}(X)$ σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ μ ზომას ეწოდება ბორელის ზომა. ბორელის μ ზომას ეწოდება რეგულარული, თუ ყოველი $B \in \mathcal{B}(X)$-სათვის

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B\,, F - \text{ჩაკეტილია}\}.$$

ცნობილია, რომ თუ X მეტრიკული სივრცეა, მაშინ ყოველი სასრული ბორელის ზომა რეგულარულია.

ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ X სივრცეში ბორელის სასრულ μ ზომას ეწოდება რადონის, თუ ყოველი $B \in \mathcal{B}(X)$-სათვის

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B,\ K - \text{კომპაქტია}\}. \quad (1)$$

ბორელის სასრულ μ ზომას ეწოდება მკვრივი, თუ (1) შესრულებულია $B = X$-სათვის. ცხადია, ყოველი რადონის ზომა რეგულარული და მკვრივია; შებრუნებული აგრეთვე სწორია. მაგრამ, ყოველი მკვრივი ზომა არ არის რადონის ზომა.

თეორემა 3.1 (ს. ულამი). ა) ვთქვათ, μ ბორელის ალბათური ზომაა X სეპარაბელურ მეტრიკულ სივრცეში. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს ისეთი ჩაკეტილი სავსებით შემოსაზღვრული სიმრავლე $C_\varepsilon \subset X$, რომ $\mu(C_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

ბ) პოლონურ X სივრცეში ყოველი ბორელის ალბათური μ ზომა რადონისაა.

დამტკიცება. ა). ვთქვათ, (x_n) ყველგან მკვრივი მიმდევრობაა X-ში და ვთქვათ, ρ არის X სივრცის მეტრიკა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $C_{n,k} = \{x \in X: \rho(x, x_k) \leq 1/n\}$, $n, k \in N$. მაშინ ყოველი $n \in N$-სათვის $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n,k} = X$. ამიტომ, ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს ისეთი $k_{n\varepsilon} \in N$, რომ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_{n\varepsilon}} C_{n,i}\right) > 1 - \varepsilon/2^n$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ჩაკეტილი, სავსებით შემოსაზღვრული $C_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{k_{n\varepsilon}} C_{n,i}\right)$ სიმრავლისათვის შესრულებულია უტოლობა $1 - \mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$.

ბ). მოცემული თეორემის ა) დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ ბორელის ყოველი ალბათური ზომა X პოლონურ სივრცეში მკვრივია და, მაშასადამე, რადონისაა (რადგანაც ბორელის ზომა მეტრიკულ სივრცეში რეგულარულია).

შედეგი. ბორელის ალბათური ზომა სრულ მეტრიკულ X სივრცეში რადონისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ისეთი სეპარაბელური ქვესიმრავლე $Y \in \mathcal{B}(X)$, რომ $\mu(Y) = 1$.

თავი III

შემთხვევითი ელემენტები

§1. ალბათური სივრცე

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ სამეულს, სადაც Ω არაცარიელი სიმრავლეა, $\mathcal{A}$ - მასზე მოჭიმული რაიმე σ-ალგებრა, P - კი $\mathcal{A}$-ზე მოცემული ალბათური ზომა, ეწოდება ალბათური სივრცე. $\mathcal{A}$ σ-ალგებრის ელემენტებს ეწოდება (შემთხვევითი) ხდომილებები. თუ $A \in \mathcal{A}$-ს, მაშინ $P(A)$ რიცხვს ეწოდება A ხდომილების ალბათობა. თუ Ω-ს ელემენტებისთვის რაიმე დებულება სრულდება P-თითქმის ყველგან (ანუ Ω-ს ყველა იმ ელემენტებისათვის, რომელთა P-ალბათობა ერთის ტოლია), მაშინ ამბობენ, რომ ეს დებულება სრულდება თითქმის უეჭველად (თ.უ.).

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება სრული, თუ პირობებიდან $A \in \mathcal{A}$ და $P(A) = 0$ გამომდინარეობს, რომ A-ს ყოველი ქვესიმრავლე ასევე ეკუთვნის $\mathcal{A}$-ს. ყოველი (არასრული) ალბათური სივრცე ადვილად შეიძლება გასრულდეს.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება სეპარაბელური, თუ σ-ალგებრა $\mathcal{A}$ სეპარაბელურია შემდეგი ფსევდომეტრიკის მიმართ: $\rho(A, B) = P(A \triangle B)$, $A, B \in \mathcal{A}$. თუ σ-ალგებრა $\mathcal{A}$ წარმოიშობა თავისი რაიმე თვლადი ქვეკლასით, მაშინ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - სეპარაბელური ალბათური სივრცეა. სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: თუ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - სეპარაბელურია, მაშინ თვლადად წარმოქმნილია P მოდულით, ე.ი. არსებობს

ისეთი თვლადად წარმოქმნილი σ-ალგებრა $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, რომ $\mathcal{A} = \{A \triangle B: A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{A}$ და $P(B) = 0\}$.

ალბათურ სივრცეს $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ეწოდება სრულყოფილი, თუ ყოველი $(\mathcal{B}(R^1), \mathcal{A})$ - ზომადი $f: \Omega \to R^1$ ფუნქციისთვის მოიძებნება ისეთი ქვესიმრავლე $B \subset f(\Omega)$, $B \in \mathcal{B}(R^1)$, რომ $P\big(f^{-1}(B)\big) = 1$.

§2. შემთხვევითი ელემენტები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ალბათური სივრცეა და $(X, \mathcal{B})$ - ზომადი სივრცეა. ზომად ასახვას $\xi: \Omega \to X$ ეწოდება შემთხვევითი ელემენტი მნიშვნელობებით $(X, \mathcal{B})$-ში.

შემდგომში, თუ არ იქნება საწინააღმდეგო ნათქვამი, ჩვენ განვიხილავთ რაიმე ფიქსირებულ „ძირითად“ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ალბათური სივრცეს და ყოველთვის არ აღვნიშნავთ, რომ განხილული შემთხვევითი ელემენტები განსაზღვრულია მასზე. ამასთან, ამ ალბათური სივრცის ბუნებას, როგორც წესი, არა აქვს არავითარი მნიშვნელობა.

$(R^1, \mathcal{B}(R^1))$-ში მნიშვნელობების მქონე შემთხვევით ელემენტს ეწოდება შემთხვევითი სიდიდე; შემთხვევით ელემენტს მნიშვნელობებით $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$-ში, $n > 1$, ეწოდება (n-განზომილებიანი) შემთხვევითი ვექტორი.

თუ X ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ შემთხვევით ელემენტს $(X, \mathcal{B}(X))$-ში ეწოდება ბორელის შემთხვევითი ელემენტი მნიშვნელობებით X-ში.

ვთქვათ, X ნორმირებული სივრცეა. თუ ξ შემთხვევითი ელემენტია $(X, \hat{\mathcal{C}}(X))$-ში ($\hat{\mathcal{C}}(X)$ - ცილინდრული σ-ალგებრაა X-ში), მაშინ ამბობენ, რომ ξ შემთხვევითი ელემენტია მნიშვნელობებით X-ში. ასახვა $\xi: \Omega \to X$ წარმოადგენს შემთხვევით ელემენტს X-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $x^* \in X^*$-სათვის ფუნქცია $\langle \xi, x^* \rangle$ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს. ცხადია, რომ თუ ξ ბორელის შემთხვევითი ელემენტია X-ში, მაშინ ξ შემთხვევითი ელემენტია X-ში; შებრუნებული არაა სა-მართლიანი (იხ. წინადადება 1.2.9).

შემთხვევით ელემენტს $(X^*, \hat{\mathcal{C}}(X^*, X))$-ში ეწოდება $*$-შემთხვევითი ელემენტი X^*-ში. ცხადია, რომ ყოველი შემთხვევითი ელემენტი X^*-ში (მით უმეტეს ყოველი ბორელის შემთხვევითი ელემენტი X^*-ში), წარმოადგენს $*$-შემთხვევით ელემენტს X^*-ში. შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, სწორი არ არის. შევნიშნოთ, რომ ყოველი შემთხვევითი ელემენტი X-ში შეიძლება განიხილებოდეს როგორც $*$-შემთხვევითი ელემენტი X^{**}-ში.

ვთქვათ, X მეტრიკული სივრცეა. ასახვას $\xi\colon \Omega \to X$ ეწოდება სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი, თუ $\xi(\Omega)$ არის X-ის სეპარაბელური ქვესიმრავლე. ξ ასახვას ეწოდება თითქმის სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი, თუ არსებობს ისეთი $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, რომ $P(\Omega_0) = 1$ და $\xi(\Omega_0)$ არის X-ის სეპარაბელური ქვესიმრავლე.

თეორემა 2.2 დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი ელემენტი ნორმირებულ სივრცეში არის ბორელის. ბანახის სივრცის შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას (მისი სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2.1 დან).

თეორემა 1.1. ვთქვათ, X ბანახის სივრცეა. სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი $\xi\colon \Omega \to X$ ასახვისთვის შემდეგი დებულებები ეკვივალენტურია:

ა) ξ ბორელის შემთხვევითი ელემენტია;

ბ) ξ შემთხვევითი ელემენტია;

გ) ნებისმიერი განცალებადი $\Gamma \subset X^*$ ქვესიმრავლისთვის ფუნქციები $\langle \xi, x^* \rangle$, $x^* \in \Gamma$, წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს.

შედეგი. ვთქვათ, X ნორმირებული სივრცეა. ყოველი სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი $*$-შემთხვევითი ელემენტი მნიშვნელობებით X^*-ში წარმოადგენს ბორელის შემთხვევით ელემენტს.

$(X, \mathcal{B})$ ზომად სივრცეში მნიშვნელობების მქონე ξ შემთხევითი ელემენტის P_ξ განაწილება (ალბათური განაწილება, განაწილების კანონი) ეწოდება P ზომის სახეს $\xi\colon \Omega \to X$ ასახვისთვის. სხვა სიტყვებით, P_ξ ალბათური ზომაა $\mathcal{B}$-ზე, განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით:

$$P_\xi(B) = P(\xi^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

$\xi^{-1}(B)$ სიმრავლისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ ალბათობის თეორიაში მიღებულ აღნიშვნას $\xi^{-1}(B) \equiv [\xi \in B]$.

ალბათობის თეორია ძირითადად შეისწავლის შემთხვევითი ელემენტების იმ თვისებებს, რომლებიც გამოითქმება მათი განაწილებების ტერმინებში. ამიტომ, შემთხვევითი ელემენტების შესახებ დებულებები ხშირად გამოითქმება მათი განაწილებების ტერმინებში.

ყოველი ალბათური μ ზომა, მოცემული რაიმე ზომად $(X, \mathcal{B})$ სივრცეზე, შეიძლება აღვიქვათ როგორც რაიმე შემთხვევითი ელემენტის განაწილება (მაგალითად, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით ელემენტად შეგვიძლია განვიხილოთ

X-ის თავის თავში იგივური ასახვა). ამ მიზეზის გამო ალბათურ ზომებს ალბათურ განაწილებებსაც უწოდებენ.

აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემულ ალბათურ სივრცეზე შეიძლება არ არსებობდეს შემთხვევითი ელემენტი, რომლის განაწილებაც ემთხვევა მოცემულ ზომას. მაგრამ თუ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ არის $[0,1]$ სეგმენტი, მასზე მოჭიმული ბორელის σ-ალგებრით და მასზე განსაზღვრული ლებეგის ზომით, ხოლო X პოლონური (სრული, მეტრიზებადი) სივრცეა ბორელის σ-ალგებრით, მაშინ ასეთი შემთხვევითი ელემენტი ყოველთვის არსებობს.

ვთქვათ, ξ შემთხვევითი ელემენტია ნორმირებულ X სივრცეში. მისი განაწილება P_ξ წარმოადგენს ალბათურ ზომას ცილინდრულ $\hat{\mathcal{C}}(X)$ σ-ალგებრაზე. თუ ξ შემთხვევითი ელემენტი სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანია, მაშინ ის წარმოადგენს ბორელის შემთხვევით ელემენტს X-ში და მისი განაწილება არის ბორელის ზომა X-ში, რომელიც P_ξ ზომის ერთადერთი გაგრძელებაა (რა თქმა უნდა, თუ X სეპარაბელურია, მაშინ ეს კითხვა არ ჩნდება, რადგან ამ შემთხვევაში $\hat{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{B}(X)$).

წინადადება 1.1. ვთქვათ, X ბანახის სივრცეა და ξ - შემთხვევითი ელემენტია X-ში. თუ ξ თითქმის სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანია, მაშინ P_ξ-ს გააჩნია (ერთადერთი) რადონის გაგრძელება. პირიქით, თუ P_ξ უშვებს რადონის გაგრძელებას და X^* შეიცავს რაიმე თვლად განცალებად ქვესიმრავლეს, მაშინ ξ თითქმის სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანია.

დამტკიცება. თუ ξ თითქმის სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანია, მაშინ არსებობს ისეთი სეპარაბელური ქვესივრცე $X_0 \subset X$, რომ $P_\xi^*(X_0) = 1$. წინადადება 1.3.6-ის თანახმად P_ξ უშვებს რადონის გაგრძელებას. პირიქით, ვთქვათ, P_ξ უშვებს რადონის μ გაგრძელებას. მაშინ ყოველი $n \in N$-სთვის შეგვიძლია მივუთითოთ ისეთი კომპაქტი $K_n \subset X$, რომ $\mu(K_n) > 1 - 1/n$. აღვნიშნოთ $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. რადგან X^* შეიცავს თვლად განცალებად ქვესიმრავლეს, ამიტომ $K \in \hat{\mathcal{C}}(X)$. შესაბამისად $P_\xi(K) = \mu(K) = 1$. აქედან $P(\xi^{-1}(K)) = 1$ და იმის გათვალისწინებით, რომ K სიმრავლე სეპარაბელურია, ξ არის თითქმის სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი ელემენტი.

ვთქვათ $(X_k, \mathcal{B}_k)$ ზომადი სივრცეა და $\xi_k: \Omega \to X_k$ შემთხვევითი ელემენტებია, $k = 1,2, \dots, n$. ასახვა $\omega \to (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ არის შემთხვევითი ელემენტი ზომად სივრცეში $(\prod_{k=1}^{n} X_k, \prod_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k)$; მის $P_{\xi_1,\dots,\xi_n}$ განაწილებას ეწოდება $\xi_1, \dots, \xi_n$ შემთხვევითი ელემენტების ერთობლივი განაწილება. ცხადია, ერთობლივი განაწილება ერთმნიშვნელოვნად განსაზღვრავს კომპონენტების განაწილებებს. შებრუნებული სწორი არ არის.

ξ_1 და ξ_2 შემთხვევით ელემენტებს ზომად $(X, \mathcal{B})$ სივრცეში ეწოდება ერთნაირად განაწილებული, თუ $P_{\xi_1} = P_{\xi_2}$. ორი ξ_1 და ξ_2 შემთხვევით ელემენტების ერთნაირად განაწილებულობის შესამოწმებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $P[\xi_1 \in B] = P[\xi_2 \in B]$ ყოველი B-სთვის რაიმე $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ ქვეკლასიდან, რომელიც ჩაკეტილია სასრული თანაკვეთების მიმართ და რომელიც წარმოქმნის σ-ალგებრას $\mathcal{B}$-ს.

ვთქვათ ξ არის P ზომის მიმართ ინტეგრებადი (ან არაუარყოფითი) შემთხვევითი სიდიდე. აღვნიშნოთ $E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega)$. $E\xi$ რიცხვს ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა (ან მათემატიკური მოლოდინი).

§3. შემთხვევითი ელემენტების კრებადობის სხვადასხვა სახეები. $L_0(\Omega, \mathcal{A}, P; X)$ სივრცე

ვთქვათ, X მეტრიკული სივრცეა, ρ მასზე მოცემული მეტრიკაა და $\xi, \eta: \Omega \to X$ რაიმე ასახვებია. $\omega \to \rho\big(\xi(\omega), \eta(\omega)\big)$ ფუნქციას მოკლედ ასე ჩავწერთ $\rho(\xi, \eta)$; ნორმირებული სივრცის შემთხვევაში $\omega \to \|\xi(\omega)\|$ ფუნქციას აღვნიშნავთ $\|\xi\|$-თი. თუ ξ და η ბორელის შემთხვევითი ელემენტებია მნიშვნელობებით X-ში და ერთ-ერთი მათგანი სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანია, მაშინ მტკიცდება, რომ $\rho(\xi, \eta)$ შემთხვევითი სიდიდეა.

ვთქვათ, (ξ_α) ბორელის შემთხვევითი ელემენტების განზოგადებული მიმდევრობაა X-ში. ამბობენ, რომ (ξ_α) ალბათურად კრებადია X-ში სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი ბორელის შემთხვევითი ξ ელემენტისაკენ (და წერენ $\xi_\alpha \xrightarrow{P} \xi$), თუ $\lim P\,[\rho(\xi_\alpha, \xi) > \varepsilon] = 0$ ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის.

ბორელის შემთხვევითი ელემენტების განზოგადებულ (ξ_α) მიმდევრობას X-ში ეწოდება განაწილებით კრებადი ბორელის ξ შემთხვევითი ელემენტისაკენ (და აღინიშნება $\xi_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$), თუ $P_{\xi\alpha} \xrightarrow{სუსტად} P_\xi$.

თუ $\xi_\alpha \xrightarrow{P} \xi$, მაშინ $\xi_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$. პირიქით სწორი არ არის; მაგრამ, თუ $x_0 \in X$ ფიქსირებული ელემენტია და $\xi_\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} x_0$, მაშინ $\xi_\alpha \xrightarrow{P} x_0$.

თანაფარდობა $\ll \xi = \eta$ თ. უ. $\gg$ არის ეკვივალენტობის თანაფარდობა $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული X მეტრიკულ სივრცეში მნიშვნელობების მქონე ყველა სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი ბორელის შემთხვევითი ელემენტების სიმრავლეზე. ეკვივალენტობის ყველა კლასის სიმრავლე აღინიშნება სიმბოლოთი $L_0(\Omega, \mathcal{A}, P; X)$, ან მოკლედ $L_0(\Omega; X)$-ით. ეს სიმრავლე აღჭურვილია მეტრიკით

$$\chi(\xi, \eta) = E\,\frac{\rho(\xi,\eta)}{1+\rho(\xi,\eta)}\,, \qquad\qquad \xi, \eta \in L_0(\Omega; X),$$

რომლის მიმართაც კრებადობა ალბათური კრებადობის ტოლფასია. $L_0(\Omega; X)$ მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიას ეწოდება ალბათური კრებადობის ტოპოლოგია. თუ X სივრცე სრულია, მაშინ მეტრიკული $L_0(\Omega; X)$ სივრცეც სრულია; თუ X სეპარაბელურია, და ამასთან $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ალბათური სივრცეც სეპარაბელურია, მაშინ $L_0(\Omega; X)$ აგრეთვე სეპარაბელურია.

თუ X ნორმირებული სივრცეა, მაშინ $L_0(\Omega; X)$ წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს და მეტრიკა χ წარმოქმნილია კვაზინორმით.

$$\|\xi\|_0 = \int_\Omega \frac{\|\xi(\omega)\|}{1+\|\xi(\omega)\|} dP(\omega), \quad \xi \in L_0(\Omega; X).$$

$L_0(\Omega; X)$ სივრცე ალბათური კრებადობის ტოპოლოგიასთან მიმართებაში წარმოადგენს მეტრიზებად ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეს. ნულის მიდამოს ფუნდამენტურ სისტემა ქმნის შემდეგი სახის სიმრავლეს

$$V_\varepsilon = \{\xi \in L_0(\Omega; X) : P[\|\xi\| > \varepsilon] < \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

$M \subset L_0(\Omega; X)$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ალბათურად შემოსაზღვრული (ან სტოქასტურად შემოსაზღვრული), თუ ის შემოსაზღვრულია როგორც სიმრავლე $L_0(\Omega; X)$ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში.

წინადადება 1.2. ვთქვათ, X ნორმირებული სივრცეა და $M \subset L_0(\Omega; X)$ რაიმე ქვესიმრავლეა. შემდეგი დებულებები ეკვივალენტურია:

ა) M შემოსაზღვრულია ალბათურად;

ბ) ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს ისეთი $r > 0$, რომ $\|r\xi\|_0 < \varepsilon$, ყოველი $\xi \in M$-სათვის;

გ) ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს ისეთი $\beta > 0$, რომ $P[\|\xi\| > \beta] < \varepsilon$, ყოველი $\xi \in M$-სათვის.

დამტკიცება. ა) და ბ) დებულებები ეკვივალენტურია ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში სიმრავლის შემოსაზღვრულობის განსაზღვრების თანახმად. იმპლიკაცია ბ) $\Rightarrow$ გ) გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობიდან $P[\|\xi\| > r^{-1}] \leq 2\|r\xi\|_0$. ვაჩვენოთ, რომ გ)-დან გამომდინარეობს ბ). მართლაც, თუ ბ) არ არის შესრულებული, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\varepsilon_0 > 0$, რომ ყოველი $n \in N$-სათვის და რაიმე $\xi_n \in M$-სათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\left\|\frac{1}{n}\xi_n\right\|_0 \geq \varepsilon_0$. მაშასადამე, $\frac{1}{n}\xi_n$ არ არის კრებადი ნულისაკენ ალათურად მაშინ, როცა გ)-დან გამომდინარეობს, რომ $\frac{1}{n}\xi_n \xrightarrow{P} 0$ ყოველი (ξ_n) მიმდევრობისთვის M-დან.

ამ წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $M \subset L_0(\Omega; X)$ სიმრავლე თ.უ. შემოსაზღვრულია, ე.ი. თუ $\sup\{\|\xi(\omega)\|: \xi \in M\} < \infty$ თ.უ., მაშინ M შემოსაზღვრულია ალბათურად. შებრუნებული სწორი არ არის.

§4. შემთხვევითი ელემენტების სუსტი და ძლიერი რიგები, კლასების შედარება

ბანახის X სივრცეში ზომის რიგი შეიძლება განისაზღვროს სხვადასხვაგვარად. ვთქვათ, $0 < p < \infty$. ამბობენ, რომ $\hat{C}(X)$-ზე μ ზომას აქვს სუსტი p რიგი, თუ

$$\int |\langle x, x^* \rangle|^p d\mu(x) < \infty \text{ ყოველი } x^* \in X^*\text{-სათვის},$$

და ვიტყვით, რომ ბორელის μ ზომას X სივრცეში აქვს ძლიერი p რიგი, თუ

$$\int \|x\|^p d\mu(x) < \infty.$$

ცხადია, ძლიერი რიგის არსებობა ყოველთვის იწვევს სუსტი რიგის არსებობას. შებრუნებული დებულება სწორია მხოლოდ სასრულგანზომილებიან შემთხვევაში. ამ დებულებას დავამტკიცებთ დვორეცკის შემდეგი თეორემის გამოყენებით.

ლემა 2.1. ვთქვათ, X არის უსასრულო განზომილებიანი ნორმირებული სივრცე. მაშინ ყოველი ნატურალური n და ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის არსებობს X-ის ისეთი $x_{n1}, \dots, x_{nn}$ ელემენტები, რომ

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{1/2} \le \left\|\sum_{k=1}^{n} t_k x_{nk}\right\| \le (1+\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{1/2}$$

ნებისმიერი ნამდვილი $t_1, \dots, t_n$-თათვის.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.1. ყოველ უსასრულო განზომილებიან ნორმირებულ X სივრცეში არსებობს (დისკრეტული) μ ალბათური ზომა, რომელსაც ნებისმიერი $p > 0$-სათვის გააჩნია სუსტი p რიგი და არ გააჩნია ძლიერი q რიგი არც ერთი დადებითი q-სათვის.

დამტკიცება. ჩავთვალოთ, რომ $\varepsilon = 1$ და ყოველი n-ისათვის ლემა 2.1-ის თანახმად შევარჩიოთ $x_{n1}, \dots, x_{nn}$ ელემენტები. ვთქვათ, μ დისკრეტული ზომაა, რომელიც ღებულობს $\beta_k x_{nk}$-ს ტოლ მნიშვნელობას ალბათობით $c\alpha_k\alpha_n$, სადაც $\alpha_k = \frac{1}{m \ln m (\ln\ln m)^2}$, $\beta_k = \ln k$ და c - მანორმირებელი კონსტანტაა, $k = 3,4, \dots, n$, $n = 3,4, \dots$. μ ზომას გააჩნია რაგინდ მაღალი სუსტი რიგი. მართლაც, თუ აღვნიშნავთ, $a = \sup\{\alpha_n \beta_n^p;\ n \ge 3\}$ გვაქვს

$$\int |\langle x, x^*\rangle|^p d\mu(x) = c\sum_{n=3}^{\infty}\alpha_n\sum_{k=3}^{n}\alpha_k\beta_k^p\,|\langle x_{nk}, x^*\rangle|^p$$
$$\le ac\sum_{n=3}^{\infty}\alpha_n\sum_{k=3}^{n}|\langle x_{nk}, x^*\rangle|^p \le ac2^p\|x^*\|^p\sum_{n=3}^{\infty}\alpha_n < \infty.$$

აქ ჩათვლილია, რომ $p > 2$, და გამოყენებულია შემდეგი დამოკიდებულება, უკანასკნელი რაც გამომდინარეობს ლემა 2.1-დან:

$$\left(\sum_{k=3}^{\infty}|\langle x_{nk}, x^*\rangle|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=3}^{n}|\langle x_{nk}, x^*\rangle|^2\right)^{1/2} = \sup\left\{\left|\sum_{k=3}^{n}\langle x_{nk}, x^*\rangle t\right| : \sum_{k=3}^{n}t_k^2 = 1\right\} \le$$
$$\le \|x^*\|\sup\left\{\left\|\sum_{k=3}^{n}x_{nk}t_k\right\| : \sum_{k=3}^{n}t_k^2 = 1\right\} \le 2\,\|x^*\|.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ μ-ს არ გააჩნია არავითარი ძლიერი რიგი. იმის გათვალისწინებით, რომ $\|x_{nk}\| \ge 1$, გვაქვს

$$\int \|x\|^q d\mu(x) = c\sum_{n=3}^{\infty}\alpha_n\sum_{k=3}^{n}\alpha_k\beta_k^q\,\|x_{nk}\|^q \ge c\sum_{n=3}^{\infty}\alpha_n\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k^q = \infty.$$

დამტკიცებული თეორემის შედეგის როლში აღვნიშნავთ ერთ ცნობილ წინადადებას. ნორმირებული X სივრცის (x_n) მიმდევრობას ეწოდება სუსტად p ჯამებადი, თუ $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x_n, x^*\rangle|^p < \infty$ ყოველი $x^* \in X^*$-სათვის და ძლიერად p ჯამებადი, თუ $\sum_{n=1}^{\infty}\|x\|^p < \infty$.

შედეგი. ყოველ უსასრულო განზომილებიან X სივრცეში ნებისმიერი p-სთვის, $0 \le p < \infty$, არსებობს სუსტად p ჯამებადი მიმდევრობა, რომელიც არ არის ძლიერად p ჯამებადი.

დამტკიცება. ვთქვათ, μ სუსტი p რიგის დისკრეტული ზომაა, რომელიც არ არის ძლიერი p რიგის. ვთქვათ, რომ $y_1, y_2, \ldots$ არის X-ის ის ელემენტები, რომლებზედაც არის თავმოყრილი μ ზომა და დავუშვათ, რომ $\mu_n = \mu\{y_n\}$. მიმდევრობას $\left(\mu_n^{1/p}\right)$, ცხადია, აქვს საჭირო თვისებები.

შევნიშნოთ, რომ შეგვიძლია აგრეთვე განვიხილოთ შემთხვევა $p = \infty$, თუ p-ხარისხში კრებადობას ბუნებრივად შევცვლით შესაბამისი მიმდევრობის შემოსაზღვრულობით. ამ შემთხვევისათვის ძალას კარგავს დამტკიცებული შედეგი, ვინაიდან ბანახ-შტეინგაუზის თეორემის ძალით ნორმირებულ სივრცეში ყოველი სუსტად შემოსაზღვრული მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ, X და Y ნორმირებული სივრცეებია. წრფივ $T\colon X \to Y$ ოპერატორს ეწოდება p-ჯამებადი, თუ $\sum \|Tx_n\|^p < \infty$ ყოველი სუსტად p-ჯამებადი $(x_n) \subset X$ მიმდევრობისათვის.

თეორემა 2.1-ის შედეგის თანახმად უსასრულოგანზომილებიან X სივრცეში იგივური ოპერატორი, არ არის p-ჯამებადი არცერთი p-სათვის, $0 < p < \infty$.

თავი IV

მათემატიკური მოლოდინი

§1. განსაზღვრა და არსებობა

ვთქვათ, X სივრცეში $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ალბათური სივრცეა, X - ნორმირებული სივრცე, ხოლო $\xi\colon \Omega \to X$ - სუსტი პირველი რიგის მქონე შემთხვევითი ელემენტია. დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი $m \in X$ ელემენტი, რომ ყოველი $x^* \in X^*$-სათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_\Omega \langle \xi(\omega), x^* \rangle dP(\omega) = \langle m, x^* \rangle.$$

m ელემენტს ეწოდება პეტისის ინტეგრალი (ან უბრალოდ ინტეგრალი) ξ შემთხვევითი ელემენტიდან P ზომის მიმართ; მას აგრეთვე უწოდებენ ξ შემთხვევითი ელემენტის საშუალო მნიშვნელობას ან მათემატიკურ მოლოდინს. ინტეგრალისთვის გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega)$ ან $E\xi$.

ვთქვათ, μ არის $\hat{C}(X)$-ზე მოცემული სუსტი პირველი რიგის მქონე ალბათური ზომა. პეტისის ინტეგრალს μ ზომის მიმართ X-ის X-ში იგივური ასახვიდან (თუკი ის არსებობს), ეწოდება μ ზომის საშუალო (ან ბარიცენტრი) და აღინიშნება m_μ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $m_\mu = E\xi$, სადაც ξ არის μ განაწილების მქონე ნებისმიერი შემთხვევითი ელემენტი X-ში.

ინტეგრალის შემდეგი თვისებები გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან.

ა) თუ $E\xi$ ინტეგრალი არსებობს, მაშინ ის ცალსახად არის განსაზღვრული.

ბ) თუ $\xi_1,\ \xi_2$ შემთხვევითი ელემენტებია და არსებობს $E\xi_1$ და $E\xi_2$, მაშინ აგრეთვე არსებობს $E(\xi_1 + \xi_2)$ და $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$.

გ) თუ ξ ისეთი შემთხვევითი ელემენტია, რომ მისი ნორმა ზომადია და არსებობს $E\xi$, მაშინ $\|E\xi\| \le E\|\xi\|$.

დ) თუ X-ის ξ შემთხვევითი ელემენტისთვის არსებობს $E\xi$ და თუ u წრფივი უწყვეტი ოპერატორია X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში, მაშინ აგრეთვე არსებობს $E(u\xi)$ და $E(u\xi) = uE(\xi)$.

აღვნიშნოთ აგრეთვე ინტეგრალის შემდეგი თვისება.

ე) ვთქვათ $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ და $P(\Omega_0) = 1$. $\xi(\Omega_0)$ სიმრავლის ამოზნექილი გარსის ჩაკეტვა აღვნიშნოთ B-თი. თუ $E\xi$ არსებობს, მაშინ $E\xi \in B$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. $E\xi = m \notin B$. მაშინ განცალების თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი $x_0^* \in X^*$, რომ რომელიმე $\alpha \in R^1$-სათვის გვაქვს $\langle \xi(\omega), x_0^* \rangle \le \alpha$ ყოველი $\omega \in \Omega_0$-სათვის და $\langle m, x_0^* \rangle > \alpha$. მაშინ $E\langle \xi, x_0^* \rangle = \langle m, x_0^* \rangle$ ტოლობას მივყავართ წინააღმდეგობამდე.

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალის არსებობის საკითხი.

სუსტი პირველი რიგის მქონე ξ შემთხვევითი ელემენტისათვის განვსაზღვროთ წრფივი ფუნქციონალი $g_\xi\colon X^* \to R^1$ შემდეგი ტოლობით

$$g_\xi(x^*) = \int_\Omega \langle \xi(\omega), x^* \rangle dP(\omega).$$

მტკიცდება, რომ g_ξ უწყვეტი ოპერატორია, ე.ი. $g_\xi \in X^{**}$ (გელფანდ-პეტისის თეორემა). აქედან გამომდინარეობს, რომ ξ-დან პეტისის ინტეგრალი არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა g_ξ განისაზღვება X-ის რაიმე ელემენტით (ე.ი. როცა g_ξ ეკუთვნის X-ის ბუნებრივ სახეს X^{**}-ში). აქედან გამომდინარეობს

წინადადება 3.1. ვთქვათ, X რეფლექსური ბანახის სივრცეა. ყოველი სუსტი პირველი რიგის შემთხვევითი $\xi\colon \Omega \to X$ ელემენტისთვის არსებობს პეტისის $E\xi$ ინტეგრალი.

ზოგად შემთხვევაში ξ-ს სუსტი პირველი რიგი არ არის ინტეგრალის არსებობის საკმარისი პირობა.

მაგალითი. ვთქვათ, $X = c_0$, (e_n) – ბუნებრივი ბაზისია, (A_n) წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა მიმდევრობაა $\mathcal{A}$-დან და $\cup A_n = \Omega$, $\mu_n = P(A_n) > 0$. დავუშვათ,

$$\xi_0 = \sum \left(\frac{1}{\mu_{2n}} I_{A_{2n}} - \frac{1}{\mu_{2n-1}} I_{A_{2n-1}} \right) e_n.$$

ცხადია, ξ_0 სუსტი პირველი რიგის მქონე შემთხვევითი ელემენტია და $E\xi_0 = 0$. ახლა განვიხილოთ $\xi = \xi_0 I_{A_0}$ შემთხვევითი ელემენტი, სადაც $A_0 = \cup A_{2k}$; ადვილი შესამოწმებელია, რომ ξ-ს გააჩნია სუსტი პირველი რიგი, მაგრამ $E\xi$ არ არსებობს.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ შეიძლება არსებობდეს სიტუაცია, როცა $E\xi$ არსებობს, მაგრამ $E\xi I_A$ არ არსებობს ზოგიერთი ზომადი $A \subset \Omega$-სათვის.

$\xi: \Omega \to X$ შემთხვევით ელემენტს ეწოდება პეტისის აზრით ინტეგრებადი, თუ ყოველი $A \in \mathcal{A}$-სათვის ინტეგრალი $E\xi I_A$ არსებობს. წინადადება 3.1 გვიჩვენებს, რომ რეფლექსურ X სივრცეში ყოველი ξ შემთხვევითი ელემენტი, რომელსაც გააჩნია სუსტი პირველი რიგი, არის პეტისის აზრით ინტეგრებადი.

ინტეგრების საკმარის პირობას შემთხვევით ელემენტზე იძლევა შემდეგი

წინადადება 3.2. ბანახის X სივრცეში ძლიერი პირველი რიგის მქონე ყოველი სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი ξ ელემენტი პეტისის აზრით ინტეგრებადია.

დამტკიცება. მარტივი ξ შემთხვევითი ელემენტისთვის $E\xi$-ს არსებობა ცხადია. ახლა ვთქვათ ξ ისეთი სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი ელემენტია, რომ $E\|\xi\| < \infty$. ავარჩიოთ მარტივი შემთხვევითი ელემენტების ისეთი (ξ_n) მიმდევრობა, რომ $\lim E\|\xi - \xi_n\| = 0$. მაშინ $\|E(\xi_n - \xi_m)\| \leq E\|\xi - \xi_n\| \to 0$ როცა $n, m \to \infty$. ამრიგად, $(E\xi_n)$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა და ადვილი დასანახია, რომ $E\xi = \lim E\xi_n$. ანალოგიური მსჯელობით (ξI_A-სთვის, $A \in \mathcal{A}$) შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $E\xi I_A$-ც აგრეთვე არსებობს.

შენიშვნა. სეპარაბელურ მნიშვნელობებიან შემთხვევით ელემენტებს, რომელთაც გააჩნიათ ძლიერი პირველი რიგი, ზოგჯერ უწოდებენ ბოხნერის აზრით ინტეგრებადს, ხოლო ინტეგრალს - ბოხნერის ინტეგრალს. ქრონოლოგიურად პირველი ინტეგრალი ბანახის სივრცეში მნიშვნელობების მქონე ფუნქციიდან, იყო ბოხნერის ინტეგრალი.

შემდეგი დებულება აღწერს პეტისის აზრით ინტეგრებად შემთხვევითი ელემენტების ფართო კლასს.

თეორემა 3.1. ვთქვათ, ξ სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი ელემენტია ბანახის X სივრცეში სუსტი p-რიგით, $1 < p < \infty$ და ვთქვათ, f - რიცხვითი შემთხვევითი სიდიდეა $L_{p'}$-დან $p' = p/(p-1)$. მაშინ ξf ნამრავლი პეტისის აზრით ინტეგრებადია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $A_n = \{\omega: \|\xi(\omega)\| \le n\}$ და ვთქვათ, $\eta_n = \xi f I_{A_n}$. მაშინ η_n სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი ელემენტია და $E\|\eta_n\| \le nE|f|I_{A_n} < \infty$. წინადადება 3.2-ის ძალით $E\eta_n$ არსებობს. გარდა ამისა გვაქვს

$$|\langle E\eta_m - E\eta_n, x^*\rangle| = \left|E\langle \xi, x^*\rangle (fI_{A_m} - fI_{A_n})\right| \le (E|\langle \xi, x^*\rangle|^p)^{1/p} \left(E\left|fI_{A_m} - fI_{A_n}\right|^{p'}\right)^{1/p'}, \ x^* \in X^*.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\|E\eta_m - E\eta_n\| \le \left\|T_\xi\right\| \left\|fI_{A_m} - fI_{A_n}\right\|_{p'} \to 0 \text{ როცა } n, m \to \infty.$$

მაშასადამე, $E\eta_n$ მიმდევრობა კრებადია და ადვილი შესამჩნევია, რომ მისი ზღვარია $E\xi f$.

შედეგი. სეპარაბელურ მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი ელემენტი სუსტი p-რიგით პეტისის აზრით ინტეგრებადია, თუ $p > 1$.

თავი V

§1. კორელაციის კოეფიციენტის ანალოგი ბანახის სივრცეებში

ვთქვათ ξ და η სუსტი მეორე რიგის მქონე შემთხვევითი ელემენტებია, რომლებიც (Ω, A, P) ალბათურ სივრცეს გადასახავენ შესაბამისად X და Y ბანახის სივრცეებში. ჩვენ ვიყენებთ [1]-ში გამოყენებულ ტერმინებსა და ცნებებს. ზოგადობის შეუზღუდავად განვიხილავთ მხოლოდ ცენტრირებულ შემთხვევით ელემენტებს.

ურთიერთკორელაციის ოპერატორი $R_{\xi\eta}$ განსაზღვრულია ტოლობით [1]:

$$\langle x^*, R_{\xi\eta} y^*\rangle = E\langle x^*, \xi\rangle \langle y^*, \eta\rangle$$

ყოველი $x^* \in X^*$ და $y^* \in Y^*$ -სათვის, სადაც E არის მათემატიკური მოლოდინის აღმნიშვნელი სიმბოლო, ხოლო X^* და Y^* წარმოადგენენ შესაბამისად X და Y ბანახის სივრცის შეუღლებულ სივრცეებს. $\langle x^*, x\rangle$ აღნიშნავს $x^* \in X^*$ ფუნქციონალის მნიშვნელობას $x \in X$ წერტილში. $R_{\xi\eta}$ არის წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი Y^* დან X-ში [1].

განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $R_{\xi\eta} = R_{\xi\eta}^*$ და $R_{\xi\xi} = R_\xi$, სადაც R_ξ არის ξ შემთხვევითი ელემენტის კოვარიაციული ოპერატორი. როგორც ცნობილია, R_ξ ფაქტორიზდება შემდეგნაირად [1]: $R_\xi = A_\xi^* A_\xi$, სადაც წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი A_ξ (R_ξ ოპერატორის კვადრატული ფესვი) X^*-ს ასახავს ჰილბერტის H_ξ სივრცეში და $A_\xi(X^*)$ მკვრივია H_ξ -ში. $A_\xi -$ის როლში შეგვიძლია განვიხილოთ ეგრეთ წოდებული ინდუცირებული ოპერატორი $T_\xi: X^* \to [T_\xi(X^*)]$, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით $T_\xi x^* = \langle x^*, \xi \rangle$ ყოველი $x^* \in X^*$ -სათვის, სადაც $[T_\xi(X^*)]$ აღნიშნავს $T_\xi(X^*)$ სიმრავლის ჩაკეტვას $L_2(\Omega, A, P)$ ჰილბერტის სივრცეში.

§2. ურთიერთკორელაციის ოპერატორი.

თეორემა 1. (i) ξ და η შემთხვევითი ელემენტების ურთიერთკორელაციის ოპერატორი $R_{\xi\eta}$ ფაქტორიზდება შემდეგნაირად:

$$R_{\xi\eta} = A_\xi^* V_{\xi\eta} A_\eta$$

სადაც $V_{\xi\eta}$ არის წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი, რომელიც H_η ჰილბერტის სივრცეს ასახავს H_ξ ჰილბერტის სივრცეში და $\|V_{\xi\eta}\| \leq 1$, ხოლო A_ξ და A_η არიან შესაბამისად ξ და η შემთხვევითი ელემენტების R_ξ და R_η კოვარიაციული ოპერატორების კვადრატული ფესვები. $V_{\xi\eta}$ ერთადერთია მოცემული არანულოვანი A_ξ და A_η-სათვის.

(ii) რომელიღაც წრფივი ოპერატორი $R_{12}: Y^* \to X$ არის ურთიერთკორელაციის ოპერატორი, თუ $R_{12} = A_1^* V A_2$ სადაც $A_1: X^* \to H_1$ და $A_2: Y^* \to H_2$ არიან წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორები, მნიშვნელობებით შესაბამისად H_1 და H_2 რაიმე ჰილბერტის სივრცეებში ისე, რომ $A_1(X^*)$ და $A_2(X^*)$ სიმრავლეები მკვრივია შესაბამისად H_1 და H_2 -ში. $A_1^*(H_1) \subset X$, $A_2^*(H_2) \subset Y$ და $V: H_2 \to H_1$ არის წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი $\|V\| \leq 1$.

შედეგი: სეპარაბელური H_1 და H_2 ჰილბერტის სივრცეებისთვის ყოველი წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი $R_{12}: H_2 \to H_1$ არის ურთიერთკორელაციის ოპერატორი.

შენიშვნა: სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეების შემთხვევაში თეორემა 1-ის ანალოგიური შედეგი ძლიერი მეორე რიგის მქონე შემთხვევითი ელემენტებისათვის დამტკიცებულია [2]-ში.

ურთიერთკორელაციის ოპერატორების აღწერა ჰილბერტის ოპერატორების ტერმინებში მოცემულია [3]-ში.

შემოვიტანოთ კორელაციის კოეფიციენტის განსაზღვრება ბანახის სივრცეებში.

განსაზღვრება: $V_{\xi\eta}$ ოპერატორს, რომელიც მონაწილეობს ფაქტორიზაციაში $R_{\xi\eta} = A_\xi^* V_{\xi\eta} A_\eta$, ეწოდება ξ და η შემთხვევითი ელემენტების კორელაციის კოეფიციენტი.

ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ეს განსაზღვრება ემთხვევა კორელაციის კოეფიციენტის ცნობილ განსაზღვრებას.

სასრულგანზომილებიან შემთხვევაში კორელაციის კოეფიციენტი მატრიცაა, ხოლო ზოგად შემთხვევაში - წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი რომლის ნორმა არ აღემატება 1-ს და ყოველთვის მოქმედებს ჰილბერტის სივრცეთა შორის. პირველად კორელაციის კოეფიციენტს ყურადღება მიექცა [2]-ში, სადაც ოპერატორების საშუალებით გამოკვლეული იყო ერთობლივი გაუსის ზომების ექვივალენტურობა სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეში.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ კორელაციის კოეფიციენტი დამოკიდებულია A_ξ და A_η კვადრატული ფესვების არჩევაზე. რადგან კოვარიაციული ოპერატორის კვადრატული ფესვი ერთადერთია იზომეტრული ოპერატორის სიზუსტით [1], კორელაციის კოეფიციენტი ერთადერთია შემდეგი აზრით: თუ ξ და η შემთხვევითი ელემენტების კორელაციის კოეფიციენტი $V'_{\xi\eta}$ შეესაბამება სხვა A'_ξ და A'_η სხვა კვადრატულ ფესვებს, მაშინ $V'_{\xi\eta} = I_\xi^* V_{\xi\eta} I_\eta$ სადაც I_ξ არის იზომეტრია $\left[A_\xi(X^*)\right]$-ისა $\left[A'_\xi(X^*)\right]$ -ზე, ხოლო I_η კი, არის იზომეტრია $\left[A_\eta(Y^*)\right]$ -ისა $\left[A'_\eta(Y^*)\right]$ -ზე. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $V_{\xi\eta} = V_{\xi\eta}^*$ და $V_{\xi\xi} = id_{H_\xi}$, სადაც id_{H_ξ} არის H_ξ-ზე განსაზღვრული იგივური ოპერატორი.

როგორც ცნობილია, ორი შემთხვევითი სიდიდე წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მათი კორელაციის კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა 1-ის ტოლია.

მომდევნო თეორემა ამ ფაქტის ანალოგია ზოგადი ბანახის სივრცეებისათვის.

თეორემა 2. ვთქვათ ξ და η 0-ში გადაუგვარებული ცენტრირებული შემთხვევითი ელემენტებია მნიშვნელობებით ბანახის X და Y სივრცეებში და ვთქვათ, $B: X \to Y$ არის წრფივი უწყვეტი ოპერატორი.

შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

(i) $\eta = B\xi$ თითქმის უეჭველად (თ.უ.);

(ii) $R_{\xi\eta} = R_\xi B^*$ და $R_\eta = BR_\xi B^*$;

(iii) $R_{\xi\eta} = R_\xi B^*$ და კორელაციის კოეფიციენტი $V_{\xi\eta}$ არის იზომეტრული ოპერატორი.

შედეგი 1. ვთქვათ, ξ და η შემთხვევითი ელემენტებია მნიშვნელობებით H სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეში. ვთქვათ, R_ξ კოვარიაციული ოპერატორი შექცევადია და $V_{\xi\eta}$ კორელაციის კოეფიციენტი იზომეტრული ოპერატორია. მაშინ, არსებობს წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი $B: H \to H$ ისეთი, რომ $\eta = B\xi$ (თ.უ.).

შედეგი 2. n-განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში R^n $(n \geq 1)$ $\eta = B\xi$ (თ.უ.) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $V_{\xi\eta}$ კორელაციის კოეფიციენტი არის იზომეტრული ოპერატორი.

შენიშვნა. სასრულგანზომილებიანი შემთხვევისაგან განსხვავებით თეორემა 2-ში $(iii) => (i)$ იმპლიკაციის სისწორისთვის საზოგადოდ არ არის საკმარისი მხოლოდ კორელაციის კოეფიციენტის იზომეტრულობა. მართლაც, ვთქვათ, H_1 და H_2 სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეებია, ხოლო ξ არაგადაგვარებული ცენტრირებული შემთხვევითი ელემენტი მნიშვნელობებით H_1-ში და კოვარიაციული ოპერატორით R_ξ, η იყოს ცენტრირებული შემთხვევითი ელემენტი მნიშვნელობებით H_2-ში და იგივური კოვარიაციული id_{H_2} [1]. ოპერატორით. თეორემა 1-დან ξ და η-ს ურთიერთკორელაციის

ოპერატორი შეგვიძლია განვსაზღვროთ ტოლობიდან: $R_{\xi\eta} = A_{\xi}^{*}Uid_{H_2}$, სადაც $A_{\xi}: H_1 \to H_1$ არის R_{ξ} ოპერატორის კვადრატული ფესვი და $U: H_2 \to H_1$ არის იზომეტრული ოპერატორი. (id_{H_2}-ის კვადრატული ფესვი არის თავად id_{H_2}). მაშინ, $\eta = B\xi$-ს თითქმის უეჭველად ტოლობის სამართლიანობისთვის აუცილებელია მომდევნო ტოლობის შესრულება $R_{\eta} = BR_{\xi}B^{*}$ აქედან გამომდინარეობს, რომ $id_{H_2} = VA_{\xi}B^{*}$, სადაც $B: H_1 \to H_2$ არის რაიმე წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი და $V: [A_{\xi}B^{*}(H_2)] \to H_2$ არის იზომეტრული ოპერატორი. მაგრამ უკანასკნელი დებულება არ არის სწორი ნებისმიერი წრფივი შემოსაზღვრული B ოპერატორისათვის, რადგან A_{ξ} კომპაქტური ოპერატორია და ამრიგად, ამ შემთხვევაში $\eta \neq B\xi$ (თ.უ) ნებისმიერი წრფივი შემოსაზღვრული B ოპერატორისათვის მიუხედავად იმისა, რომ ξ და η შემთხვევითი ელემენტების U კორელაციის კოეფიციენტი არის იზომეტრული ოპერატორი.

თავი VI

დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის შესახებ

ჩვენ მიერ დამტკიცებული შემდეგი თეორემა წარმოადგენს სუსტად დამოკიდებული შემთხვევითი ელემენტებისათვის ხინჩინის თეორემის ანალოგს ჰილბერტის სივრცის შემთხვევაში.

თეორემა. ვთქვათ მოცემულია ძლიერი მეორე რიგის მქონე შემთხვევით ელემენტთა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ მიმდევრობა მნიშვნელობებით H ჰილბერტის სივრცეში. გარდა ამისა, ვთქვათ, ξ_n-ის მათემატიკური მოლოდინია 0, ხოლო მისი კოვარიაციული ოპერატორი აღვნიშნოთ R_n-ით $n = 1,2, \ldots$. აგრეთვე ვთქვათ არსებობს არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული არაუარყოფით მნიშვნელობებიანი ფუნქცია c ისეთი, რომ ξ_n და ξ_m შემთხვევითი ელემენტების კორელაციის V_{nm} კოეფიციენტისათვის სრულდება პირობა $\|V_{nm}\| \leq c(|n-m|)$, $\quad n, m = 1,2, \ldots$. მაშინ მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c(i)\cdot \sum_{i=1}^{n} tr(R_i)}{n^2} = 0. \qquad (1.1)$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ (φ_k)-თი H ჰილბერტის სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, R_i და R_j-თი - შესაბამისად ξ_i და ξ_j შემთხვევითი ელემენტების კოვარიაციული ოპერატორები და A_i და A_j-თი - კვადრატული ფესვები შესაბამისად R_i და R_j კოვარი-აციული ოპერატორებიდან. თუ ყოველი i და j–სათვის გავითვალისწინებთ თანაფარდო-ბებს

$R_{ij} = A_i^* V_{ij} A_j$,

$\left(R_{ij}\varphi_k, \varphi_k\right) = \left(V_{ij}A_j\varphi_k, A_i\varphi_k\right) \le \left\|V_{ij}\right\| \|A_i\varphi_k\| \left\|A_j\varphi_k\right\|$,

$tr(R_i) = \sum_{k=1}^{n} (R_i\varphi_k, \varphi_k)$, სადაც $tr(R_i)$ აღნიშნავს R_i ბირთვული ოპერატორის კვალს, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i/n\right\|^2 = \frac{1}{n^2}E\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}E\left(\varphi_k, \sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}E(\varphi_k,\xi_i)\left(\varphi_k,\xi_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\left(R_{ij}\varphi_k,\varphi_k\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_i^*V_{ij}A_j\varphi_k,\varphi_k\right) \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|V_{ij}\right\|\|A_i\varphi_k\|\left\|A_j\varphi_k\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}c(i)\sum_{i=1}^{n}(R_i\varphi_k,\varphi_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}c(i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(R_i\varphi_k,\varphi_k)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}c(i)\cdot\sum_{i=1}^{n}tr(R_i)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ჩებიშევის უტოლობას, რომლის ძალითაც

$$P\left[\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i/n\right\| > \varepsilon\right] \le E\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i/n\right\|^2/\varepsilon^2,$$

ცხადია, ყოველი ε >0-სათვის შესრულებული იქნება

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i/n\right\| > \varepsilon\right] = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ სრულდება პირობა

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} tr(R_i)/n\right) = 0, \tag{1.2}$$

მაშინ მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს.

დამტკიცება. მართლაც, რადგანაც კორელაციის კოეფიციენტი აკმაყოფილებს პირობას $\|V_{nm}\| \le 1$, ამიტომ c ფუნქციად შესაძლებელია ავიღოთ მუდმივი ფუნქცია $c(k) \equiv 1$ ყოველი $k = 0,1,\dots$ -სათვის. ამის გათვალისწინებით (1.1)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს პირობა (1.2).

გავიხსენოთ რამდენიმე ცნობილი განსაზღვრება, აგრეთვე, ჩებიშევისა და ხინჩინის თეორემები:

1. ვიტყვით, რომ შემთხვევით სიდიდეთა $\eta_1, \eta_2, \ldots$ უსასრულო მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა სუსტ კანონს და დავწერთ

$$(\eta_n) \in WLLN$$

თუ, $\frac{\eta_1+\cdots+\eta_n}{n}$ მიმდევრობა ალბათობით მიისწრაფვის 0-საკენ.

2. შემთხვევით სიდიდეთა $\eta_1, \eta_2, \ldots$ უსასრულო მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა გაძლიერებულ კანონს და დავწერთ

$$(\eta_n) \in SLLN$$

თუ, $\frac{\eta_1+\cdots+\eta_n}{n}$ მიმდევრობა თითქმის ყველგან მიისწრაფვის 0-საკენ.

3. ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება მეორე რიგის, თუ $E\xi^2 < \infty$. ხოლო - ეწოდება ცენტრირებული თუ $E\xi = 0$.

ვთქვათ ξ და η მეორე რიგის ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდეებია. მათი კორელაციის კოეფიციენტი $\rho(\xi, \eta)$ განისაზღვრება ტოლობით $\rho(\xi, \eta) = \frac{E\xi\eta}{\sqrt{E\xi^2 E\eta^2}}$.

მეორე რიგის ცენტრირებულ ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს არაკორელირებული ეწოდება თუ $\rho(\xi, \eta) = 0$.

კოლმოგოროვის თანახმად შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ჩებიშევს:

თეორემა (ჩებიშევი). ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მეორე რიგის წყვილ წყვილად არაკორელი-რებული შემთხვევითი სიდიდეებია,

თუ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2 = 0,$$

მაშინ

$$(\xi_n) \in WLLN.$$

კვლავ კოლმოგოროვის თანახმად, ჩებიშევის თეორემის შემდეგი განზოგადება ეკუთვნის ხინჩინს.

თეორემა (ხინჩინი). ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \dots$ მეორე რიგის ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო $c: N_0 \to R^+$ რაიმე ფუნქციაა. $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C(k),\ n = 1,2,\dots$

თუ

$$\rho(\xi_n, \xi_m) \le C(|n-m|) \quad n, m = 1,2,\dots$$

და

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2 = 0,$$

მაშინ $(\xi_n) \in WLLN.$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ნაშრომში ჩამოყალიბებული და დამტკიცებულია ხინჩინის თეორემის ანალოგი ჰილბერტის სივრცისათვის. ბუნებრივად ჩნდება კითხვა, იგივე პირობებში დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის მართებულობის შესახებ. აღმოჩნდა, რომ ამ კითხვაზე პასუხი უარყოფითია ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ჩებიშევის თეორემის პირობებშიც კი. ეს გამოდის პროხოროვის შემდეგი თეორემიდან:

თეორემა (პროხოროვი). ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \dots$ გაუსის დამოუკიდებელი, ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდეებია და

$$b_n = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sum_{2^n \le k \le 2^{n+1}-1} E\xi_k^2 \qquad n = 1,2,\dots$$

მაშინ, შემდეგი დებულებები ექვივალენტურია:

(i) $(\xi_n) \in SLLN$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{b_n}} < \infty \qquad \forall \varepsilon > 0$

შენიშვნა. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ (b_n) კლებადი მიმდევრობაა, მაშინ *(ii)* *პირობა ექვივალენტურია შემდეგი პირობის*

(iii) $\lim_{n\to\infty} b_n \cdot \ln n = 0$

შენიშვნა. აგრეთვე ადვილი შესამჩნევია, რომ ჩებიშევის პირობიდან $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2 = 0$ არ გამოდის *(iii)* პირობა.

ამრიგად, გამოდის, რომ საზოგადოდ ჩებიშევის პირობიდან არ გამოდის დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი დამოუკიდებელი ცენტრირებული გაუსის შემთხვევითი სიდიდეებისთვისაც კი.

დასკვნა

ნაშრომი შედგება სამი ნაწილისაგან, რომელთაგან პირველში მოცემულია ალბათობის თეორიის განვითარების ძირითადი ეტაპები ვექტორულ სივრცეებში დამტკიცებებითურთ, ნაშრომის მეორე ნაწილი ეხება კორელაციის კოეფიციენტის ანალოგს ბანახის სივრცეებში, განხილულია ურთიერთკორელაციის ოპერატორი ჰილბერტის სივრცეში, ხოლო მესამე ნაწილში განხილულია დიდ რიცხვთა

გაძლიერებული კანონის მართებულობა ჰილბერტის სივრცის შემთხვევაში. კერძოდ, წინა ნაშრომში ჩამოყალიბებული და დამტკიცებული გვქონდა ხინჩინისა და ბერნშტეინის თეორემების ანალოგები (დიდ რიცხვთა სუსტი კანონი) ჰილბერტის სივრცის შემთხვევაში, რაც წარმოადგენდა ახალ შედეგს, ბუნებრივად გაჩნდა კითხვა არის თუ არა მართებული დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი იგივე პირობებში, სწორედ ამ კითხვაზეა გაცემული პასუხი ნაშრომის დასკვნით, მესამე ნაწილში. გასული საუკუნის მეორე ნახევრიდან დაიწყო ზღვარითი თეორემების შესწავლა უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში, რომლებმაც თავისი სპეციფიკა შეიტანა აღნიშნულ პრობლემატიკაში, რომელსაც უფრო დეტალურად გაეცნობით ნაშრომში გამოყენებული ლიტერატურის მეშვეობით.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. N. Vakhania, V. Tarieladze, S. chobanyan. Probability distributions on Banach Spaces. Dordrecht etc.: D. Reidel Publishing Company, 482 p., 1987.

2. C.R. Baker. Trans. Amer. Math. Soc., 186, 459, 1973, 273-289.

3. M.M. Mohi El-Din. Bull. Acad. Sci. Georgian SSR, 78, 1, 1975, 33-36.

4. V. Kvaratskhelia. the analogue of the coefficient of correlation in Banach Spaces. Bull. Georgian Acad. Sci., 161, 3, 2000, 377-379.

5. M. Лоэв. Теория вероятностей. M., ИЛ, 1962

6. A.H. Колмогоров, И.Г. Журбенко, A.B. Прохоров. Введение в теорию вероятностей. M., Наука, 1982

7. Г.П. Климов. Теория вероятностей и математическая статистика. M., МГУ, 1983

8. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее применение. Т. 1. М., Мир, 1984

9. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961

10. Дж. Ламперти. Вероятность. М., Наука,1973

11. А.Н. Ширяев. Вероятность – 2. М., МЦНМО, 2004

12. Х. Шефер. Топологические Векторные Пространства. М. Мир, 1971.

13. *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционалноо анализа. Изд. "НАУКА" Москва 1968.*

14. *А.* Пич. Операторные Идеалы. М. Мир, 1982.

15. ე. წითლანაძე. ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლები. გამომცემლობა "ცოდნა", თბილისი, 1964.